Introduction aux pavages : présentation du dossier

Équipe académique mathématiques
C. Drouin
Bordeaux, novembre 2002
parcourir le dossier

Au sommaire de cette page :

- Télécharger l'intégralité de ce dossier (pages HTML zippées ; 214 Ko)

(*) Attention : les sections S et L ont disparues depuis la réforme du lycée 2019/2020 et les frises & pavages sont abordés au collège dans le cadre des transformations planes depuis la réforme du collège de 2020.

Introduction

Les pavages se sont introduits de façon modeste, récemment, dans les programmes de lycée, comme thème d'étude en classe de seconde et de première L. Ils peuvent aussi croiser les thèmes de TPE en série S (en liaison avec la cristallographie), par exemple en term S (Espace et Mouvement, ou Images). (*)

Ce dossier propose une introduction aux pavages, à destination plutôt des enseignants.

L'intérêt principal des pavages est qu'ils permettent de faire de la géométrie de façon à la fois esthétique, motivante et très mathématique.

Esthétique : L'accord est presque unanime sur la beauté des pavages réalisés par des artistes tel Escher.

Motivante : Non seulement il est agréable de contempler ces œuvres, mais encore on est vite tenté d'en réaliser sinon de comparables, du moins de personnelles ; or cela est possible sans trop de difficultés, et avec beaucoup de plaisir, car il faut y mettre de l'astuce, mais aussi des qualités manuelles et artistiques : découper, coller, dessiner, imaginer...

Mathématique : On peut faire des pavages sans trop en connaître la théorie, mais la beauté de ces dessins est indissociable des mathématiques sous-jacentes.

Les concepts mathématiques derrière les pavages sont principalement ceux d'isométrie et de groupe d'isométries (cas des frises, des pavages bipériodiques, de la cristallographie). Mais on peut aussi considérer les pavages indépendamment de ces deux concepts, si l'on s'intéresse par exemple aux pavages polygonaux ou aux pavages de Penrose.

Fiches de présentation des pavages

1. Généralités sur les pavages
2. Frises
3. Dessins bipériodiques (ou papiers peints)
   - 3.1. Notions générales sur les dessins bipériodiques
   - 3.2. Réalisation de dessins bipériodiques translatés
   - 3.3. Réalisation de dessins bipériodiques rotatifs (admettant une rotation comme isométrie)
   - 3.4. Réalisation de dessins symétriques glissés (n'admettant pas de rotation comme isométrie, sauf éventuellement des demi-tours)
   - 3.5. Réalisation de dessins bipériodiques figuratifs

Pour une **présentation logique** du thème, on parcourra les pages dans l'ordre ci-dessus.

En revanche, si l'on préfère **s'initier d'abord visuellement** aux pavages, sans souci théorique dans un premier temps, on pourra d'abord regarder les images, en particulier dans les fiches 2, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 , sans trop regarder les définitions qui y figurent. Pour une telle initiation visuelle on pourra visiter certaines adresses internet (voir ci-dessous les pages de liens).

Pour faire vraiment le tour du thème, il faudrait traiter les pavages non-périodiques, et surtout les pavages de l'Espace, qui sont liés à la cristallographie. Nous nous contentons de fournir quelques liens internet sur ces deux thèmes (voir ci-dessous).

Pages de liens sur les pavages

pavages bipériodiques

pavages de Penrose

Bibliographie

Outre les sites internet donnés en liens, on pourra consulter l'ouvrage :

Le monde des pavages,
A. Deledicq et R. Raba, aux éditions du Kangourou-ACL Éditions.

Cet ouvrage est conçu pour être abordé par des élèves ; toutefois, les enseignants peuvent y glaner maintes choses intéressantes.





1. Généralités sur les pavages

Équipe académique mathématiques
C. Drouin
Bordeaux, novembre 2002

Au sommaire de cette page

A. Définitions de base sur les pavages

1. Frontière, intérieur, fermé

Nous avons besoin ici de quelques concepts assez intuitifs : ceux de frontière et d'intérieur d'un ensemble, et celui d'ensemble fermé.

Nous considérerons la notion de frontière d'un ensemble P comme acquise intuitivement : pour fixer les idées, la **frontière** de P est l'ensemble des points qui sont "au contact" aussi bien de E que de son complémentaire.

L'**intérieur** d'un ensemble P est l'ensemble des points de P qui ne sont pas sur sa frontière.

On dit qu'un ensemble P est un **fermé** lorsqu'il contient sa frontière F.

Exemple

Soit P la réunion d'un disque ouvert et d'un demi-périmètre de ce disque.

La frontière de P est le cercle en son entier.

L'intérieur de P est le disque ouvert (sans le cercle).

P n'est pas fermé puisqu'il ne contient pas sa frontière.

2. Pavage

Soit E un ensemble. On dit que des sous-ensembles de E réalisent un **pavage** de E si les conditions suivantes sont réunies :

- Chacun de ces sous-ensembles est un fermé d'intérieur non vide.
- La réunion de ces sous-ensembles est égale à E.
- Deux quelconques de ces sous-ensembles ont toujours une intersection vide, ou une intersection contenue dans leur frontière.

Si des sous-ensembles de E réalisent un tel pavage de E, on les appelle des pavés.

En général, l'ensemble E qui est pavé est le plan. Mais E peut-être aussi une bande dans le plan (cas des frises), la surface d'une sphère ou l'espace à trois dimensions.

B. Isométries - Quelques pavages particuliers

1. Définitions

Pavés isométriques

On dit que deux pavés sont isométriques si l'on peut passer de l'un à l'autre par une isométrie. En langage plus élémentaire, ceci veut dire que ces deux pavés sont "superposables".

Pavages réguliers et semi-réguliers

On dit qu'un pavage est **régulier** si tous les pavés sont isométriques (superposables). Autrement dit, tous les pavages sont du même modèle.

On dit qu'un pavage est **semi-régulier** lorsqu'il y a un nombre fini de modèles de pavés. Autrement dit, lorsqu'il existe des pavés P_1, P_2, ... , P_n, tels que tout pavé du pavage est superposable à l'un de ces n pavés.

> **Recherche et démonstration**
> Trouver tous les pavages possibles du plan par des polygones réguliers inscriptibles.

Isométries du pavage

On dit qu'une isométrie f est une **isométrie du pavage**, ou encore que f laisse le pavage globalement invariant, si pour tout pavé P du pavage, f(P), son ensemble image par f, est encore un pavé du pavage.

> **Analyse de dessin**
> Pour différents pavages du plan, trouver les isométries du pavage.

Pavage polygonal sommital

On appelle pavage **polygonal sommital** du plan un pavage du plan par des polygones réguliers inscriptibles vérifiant les conditions suivantes :

- Si un sommet S d'un polygone P du pavage, appartient à un autre polygone P' du pavage, alors S est un sommet de P' (et jamais un point d'un côté de P' qui ne soit pas un sommet). [On pourrait donner une figure contre-exemple ; voir "Le monde des pavages", page 13, à droite en bas].
- Si on considère, dans ce pavage, deux sommets quelconques S et S' de polygones, il existe toujours une isométrie f du pavage telle que f(S) = S'.

> **Recherche et démonstration**
> Trouver tous les pavages polygonaux sommitaux du plan.
> Voir "Lle monde des pavages", pages 13 à 15, ou le site Totally Tesselated.
> Méthode : trouver les configurations possibles en un sommet, et voir, pour chacune d'elles, si elle peut se retrouver isométriquement en chacun des sommets.
>
> **Analyse de dessin**
> Pour ces pavages polygonaux sommitaux, trouver les isométries laissant le pavage invariant.

2. Théorème : groupe d'isométries d'un pavage

L'ensemble de isométries d'un pavage P est un groupe pour la composition des isométries.

3. Pavages totalement-réguliers

On dit qu'un pavage est **totalement-régulier** si pour tout couple (P , P') de deux pavés du pavage, il existe une isométrie du pavage, f, telle que f(P) = P'.

Tout pavage totalement-régulier est donc aussi régulier, mais il existe des pavages réguliers qui ne sont pas totalement-réguliers.

> **Recherche et analyse de dessins**
> Donner des exemples de pavages réguliers mais non totalement-réguliers.

C. Pavages périodiques et non périodiques

1. Pavages périodiques et bipériodiques

On dit qu'un pavage est **périodique** s'il admet comme isométrie une translation.

On dit qu'il est **bipériodique** s'il admet comme isométries deux translations de vecteurs non colinéaires.

Les pavages périodiques et bipériodiques font l'objet des fiches suivantes.

2. Pavés interdisant la périodicité

Les mathématiciens ont recherché des modèles de pavés tels qu'aucun pavage du plan semi-régulier avec ces modèles de pavés ne puisse être périodique. Roger Penrose a

trouvé la solution la plus simple, avec deux modèles de pavé seulement, construits à partir d'un angle de 36°.

Voir sur ce site la séquence de présentation des pavages de Penrose, destinée aux classes TL.

Voir aussi la page de liens sur les pavages de Penrose.

D. Introduction aux pavages bipériodiques du plan

Les pavages bipériodiques font l'objet des fiches 3.1 à 3.5.

On peut déjà donner quelques définitions.

Pavage minimal / Pavé minimal

On dit qu'un pavage **totalement-régulier** est **minimal**, ou encore que son pavé est minimal, si pour tout pavé P du pavage et pour tout couple (f, g) d'isométries distinctes du pavage, f(P) est différent de g(P).

> **Contre-exemple**
> Considérons un pavage P du plan par des parallélogrammes. Ce pavage est invariant par toute symétrie centrale S, de centre le centre d'un parallélogramme du pavage, ainsi évidemment que par l'application identique I. Or on a : S(P)=I(P)=P. Ce pavage n'est donc pas minimal. En revanche, si on découpe suivant une diagonale chacun des parallélogrammes (supposés ni rectangles, ni losanges), on obtiendra un nouveau pavage dont le pavé sera minimal.
> Nous préférons le concept d'**ensemble minimal** à celui de pavage minimal. Voir les fiches suivantes.

> **Réalisation de frises ou de pavages artistiques : pavages décorés**
> Avec un minimum de connaissances, il est facile de réaliser des frises ou des pavages où le pavé est décomposé en plusieurs zones de couleurs différentes, qui forment alors des motifs en se juxtaposant. Ils peuvent être très jolis, mais ne peuvent guère être figuratifs ; les formes sont uniquement géométriques. [Voir le paragraphe ci-dessous]. Pour savoir faire des **pavages décorés**, on consultera les fiches 2. (frises), 3.2, 3.3, 3.4.

Pavages figuratifs

On dit qu'un pavage est figuratif , ou à motif figuratif, lorsque le contour même du pavé représente une forme familière : géométrique, végétale, animale, humaine... Ce sont les pavages les plus artistiques. Ceux d'Escher constituent sans doute le sommet de cet art.

Pour s'initier aux pavages figuratifs, voir les fiches 3.2, 3.5. (pavages du plan) et 2. (frises).


Haut de page

sommaire   parcourir le dossier

2. Les frises

Équipe académique mathématiques
C. Drouin
Bordeaux, novembre 2002

Les frises constituent un domaine mathématique relativement simple qui permet de s'initier aux pavages et d'employer l'outil "isométries", tout en présentant un aspect artistique intéressant. Elles sont une bonne introduction aux pavages bipériodiques (fiches 3.1 et suivantes), qui mettent en jeu les mêmes concepts mathématiques, mais de façon plus complexe (plus spectaculaire aussi).

Cette fiche indique comment analyser, et surtout réaliser, des frises. Elle présente les notions mathématiques qui interviennent.

Pour aborder les frises de façon plus visuelle, plus plaisante et moins théorique, on peut commencer par consulter les paragraphes C. et D. , en revenant sur les définitions dans un second temps.

Au sommaire de cette page

A. Définitions

Bande

On appelle **bande du plan** la zone du plan comprise entre deux droites parallèles.

On suppose désormais choisie une bande B du plan.

Dessin

On considère ici qu'un **dessin** dans la bande B n'est autre qu'un sous-ensemble D de cette bande. Dans le cas par exemple d'un dessin en noir et blanc, on peut considérer que D est l'ensemble des points de la bande en noir, l'ensemble complémentaire de D dans B étant en blanc.

Frise

Soit D un dessin dans une bande B, c'est-à-dire un sous-ensemble de B. On dit que D est une frise de B si il existe un vecteur **u** tel que :

* **u** est un vecteur directeur des deux droites frontières de la bande.

* D est invariant par la translation de vecteur **u**, c'est-à-dire : t**u**(D) = D.

* Si D est invariant par une translation de vecteur **v**, alors **v** est de la forme **v =** k**.u**, k étant un entier relatif. Autrement dit, **u** est un des deux vecteurs non-nuls de norme minimale des translations laissant D invariant. On dit que **u** est un **vecteur minimal** de la frise.

On peut exprimer de façon concrète le fait que D soit invariant par la translation de vecteur **u** : si on décalque D, et si on fait glisser le calque suivant le vecteur **u** , on peut de nouveau faire coïncider le dessin de D sur le calque avec D.

Décor

On peut aussi vouloir donner de l'importance aux couleurs de la figure. Nous parlerons alors de **décor** de la bande.

Dire qu'un décor est invariant par une isométrie f du plan, c'est dire que toute partie P du décor se transforme par f en une partie f(P) ayant mêmes formes et mêmes couleurs.

Définition précise d'un décor

Attention
Une isométrie f peut fort bien laisser les dessins (les formes) invariants et ne pas respecter les couleurs. Quand on recherche les isométries d'une figure, il faut spécifier s'il s'agit du décor coloré ou du seul dessin.

Analyser une frise
Il convient d'abord de repérer un **vecteur minimal** de la frise.

Ensemble translaté de base d'une frise

Il s'agit d'une partie E du plan, fermée (c'est-à-dire contenant sa frontière), connexe (c'est-à-dire d'un seul tenant), ayant la propriété suivante :

Les translatés de E par les translations de vecteurs k.**u** avec k entier relatif, recouvrent totalement la bande B, sans laisser de vide, et sans empiéter l'un sur l'autre, sinon par leurs frontières.

Autrement dit, les translatés de E réalisent un pavage de la bande, invariant par les mêmes translations que le dessin lui-même.

Si l'on veut se rappeler ce qu'est un pavage, et ce qu'est l'invariance d'un pavage par une isométrie (ce qui n'est pas essentiel pour la suite), voir la fiche 1 "Généralités sur les Pavages".

Remarques
¤ Il est toujours possible et souvent intéressant de considérer un parallélogramme translaté de base ou un rectangle translaté de base qui sont des ensembles translatés de base de forme particulière.
Il suffit de choisir un parallélogramme (ou un rectangle) dont deux côtés sont inclus dans les droites frontières de la bande et supportent, de plus, un vecteur minimal de la frise.

¤ La partie du dessin tracée dans un tel parallélogramme de base n'a généralement pas une forme agréable. Souvent, le motif même du pavage, ou une réunion de motifs, fournit un ensemble translaté de base plus esthétique et plus commode.

¤ Tous les ensembles translatés de base ont la même aire.

Analyse
Repérer de tels ensembles translatés de base sur les exemples présentés.

B. Isométrie d'une frise ⏏

1. Outil mathématique nécessaire : les isométries du plan

- Translations
- Rotations (dont symétrie centrale)
- Réflexions (c'est-à-dire symétries orthogonales)
- Éventuellement : réflexion glissée.

On appelle **réflexion glissée** la succession d'une réflexion s et d'une translation t**w** dont le vecteur directeur dirige l'axe de la réflexion. Mathématiquement, l'isométrie résultante est appelée composée des isométries s et t**w**, et notée t**w** o s.

2. Isométrie d'une frise

On dit qu'une transformation f est une isométrie de la frise D si f laisse invariant aussi bien la bande B que le dessin D. Autrement dit si on a à la fois : f(B) = B et f(D) = D.

Analyser un dessin
Repérer les isométries d'une frise.

3. Isométrie possibles d'une frise

- Si c'est une rotation, ce ne peut-être qu'une symétrie centrale, le centre se trouvant sur l'axe de symétrie de la bande.

- Si c'est une symétrie orthogonale, son axe est soit l'axe de symétrie de la bande, soit une droite perpendiculaire à cet axe de symétrie.

- Si c'est une réflexion glissée, son axe est l'axe de symétrie de la bande.

> **Activité**
> Démontrer ce résultat
> On pourra pour cela admettre que si une isométrie f transforme la bande B en B elle-même, alors f transforme la frontière de B en la frontière de B elle-même. Soient d' et d" les deux droites qui constituent la frontière de B, on a alors : f(d ' U d ") = d ' U d ".

> **Analyser une frise**
> Tracer les axes de symétrie, placer les centres des symétries centrales laissant la frise invariante ; éventuellement, définir les symétries glissées laissant la frise invariante.
> On obtient aussi un ensemble de points et d'axes qui est essentiel pour l'étude de la frise et qui en est comme le "squelette". On appellera cet ensemble la **trame du dessin**.

4. Ensemble minimal d'une frise

Il s'agit d'une partie M de la bande B telle que si l'on prend tous ses ensembles transformés f(M) par toutes les isométries f laissant la frise invariante, les ensembles f(M), tous distincts, recouvrent le plan, sans empiéter l'un sur l'autre, sinon éventuellement à leurs frontières.

Autrement dit, les ensembles f(M) réalisent un pavage de la bande.

On appelle motif minimal l'intersection du dessin, ou bien du décor, avec l'ensemble minimal.

> **Remarque**
> Il est toujours possible, et souvent intéressant, de considérer un parallélogramme minimal ou un rectangle minimal qui sont des ensembles minimaux de formes particulières.

> **Analyser un dessin**
> Repérer un ensemble minimal d'une frise

5. Ensemble translaté adapté d'une frise

Un ensemble translaté adapté pour un dessin D qui est une frise est un ensemble translaté de base de D qui a, de plus, la propriété d'être constitué d'un ensemble minimal M et d'images de M par certaines isométries de la frise.

L'intérêt d'un ensemble translaté adapté est qu'il fait apparaître certaines des transformations de la frise : symétries centrales, axiales ou glissées.

> **Analyser un dessin**
> Repérer un ensemble translaté adapté d'une frise.

C. Construction d'une frise simple (simplement translatée)

L'exemple qui suit a été réalisé avec le logiciel CABRI. On se sert de façon essentielle de l'outil "polygone" de CABRI.

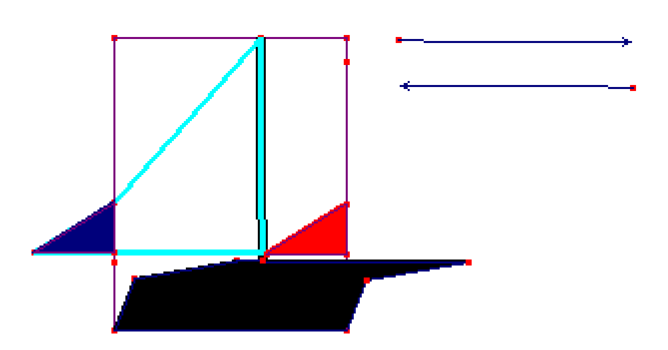
On souhaite réaliser une frise de voiliers, frise du type le plus simple : F1, simplement translaté (voir le paragraphe suivant).

On part donc du rectangle qui est le **rectangle translaté de base** (et aussi, en l'occurence, le **rectangle minimal**).

On commence à dessiner la coque du voilier. Si on ajoute une proue (en noir) hors du rectangle minimal, la partie translatée correspondante (en rouge), doit être enlevée du dessin, ce qui modifie l'arrière du bateau

Occupons nous maintenant de la voile.

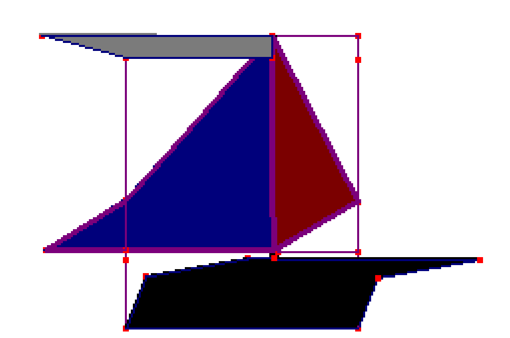
Si une partie (en bleu) de la voile déborde du rectangle minimal, il faudra ôter (en rouge) sa translatée.

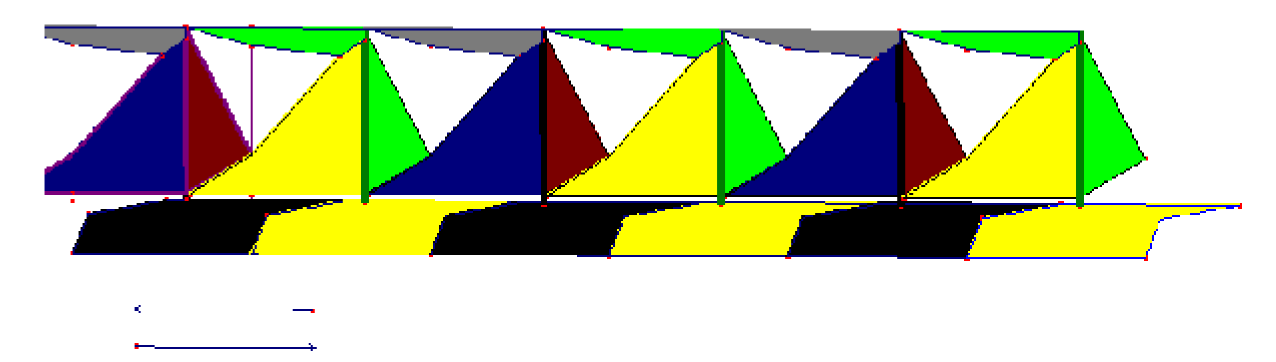


En tenant compte de cette partie supprimée, on complète la figure par un foc et un pavillon qui va jusqu'au mat suivant.

Ca y est, on a notre **motif minimal (et translaté).**

Reste seulement à le reproduire par translation pour obtenir une frise des plus simples (de type F1).





Si vous êtes intéressé par ce type de construction de frises, consultez le paragraphe E ci-dessous. Cependant, pour réaliser de belles frises, il faut avoir quelques notions théoriques, fournies par le paragraphe D suivant.

D. Classification des frises

1. Théorème de classification

Les frises se répartissent selon les sept types suivants, qui correspondent bien à leur aspect visuel (on note G l'ensemble des isométries de la frise, et d l'axe de symétrie de la bande) :

- G ne comprend que des translations (type F1)
- G ne comprend que des translations et des symétries centrales dont le centre est sur d (type F2)
- G ne comprend que des translations et la symétrie orthogonale d'axe d (type F1m)
- G ne comprend que des translations et des symétries orthogonales d'axes perpendiculaires à d (type Fmm)
- G ne comprend que des translations et des symétries glissées d'axe d (type F1g)

- G ne comprend que des translations, des symétries centrales et des symétries orthogonales d'axes perpendiculaires à d (type Fm2)

- G ne comprend que des translations, la symétrie d'axe d, des symétries orthogonales d'axes perpendiculaires à d et des symétries centrales dont le centre est sur d (type F4)

Dans tous les cas, la disposition relative des axes et/ou des centres de symétrie peut être parfaitement précisée à l'aide du vecteur **u** d'une translation minimale.

Par exemple, dans le cas F2, les symétries centrales ont toutes leur centre sur d. De plus, sur cette droite, on passe d'un des centres au suivant par la translation de vecteur 1/2.**u** . De telles précisions peuvent être apportées pour tous les types de frises.

> **Activité mathématique**
> Composer entre elles plusieurs isométries laissant la frise invariante ; démontrer le théorème de classification.
> **Prérequis** : savoir que l'ensemble des isométries d'une frise constitue un groupe.

2. Rectangle minimal pour chacun des types de frises

Soit pour analyser, soit surtout pour construire un dessin de type donné, il est utile, voire indispensable, de considérer un rectangle minimal et un rectangle translaté adapté de cette frise. Pour la définition de ces ensembles voir les paragraphes A et B ; pour l'utilisation graphique de ces ensembles, voir le paragraphe E.

On donne ci-dessous un rectangle minimal pour chacun des types de frises et on indique comment passer au rectangle translaté adapté correspondant.

- Dans le cas du type de frise F1 on peut prendre comme rectangle minimal un rectangle translaté de base, c'est-à-dire un rectangle dont deux côtés sont inclus dans les droites frontières de la bande, et, de plus, supportent un vecteur minimal de la frise. On peut aussi considérer un simple parallélogramme de base.

- Dans chacun des types de frise Fmm, F2, Fm2, on peut prendre comme rectangle minimal un rectangle dont deux côtés sont inclus dans les droites frontières de la bande, les deux autres côtés étant chacun soit le support d'un axe de symétrie de la frise, soit un segment contenant un centre de symétrie. On obtient alors un rectangle translaté de base, adapté, en doublant le rectangle minimal par symétrie (axiale ou centrale, c'est selon).

- De même, pour le type de frise F1g, on peut prendre comme rectangle minimal un rectangle dont deux côtés sont inclus dans les droites frontières de la bande et portent la moitié du vecteur minimal. On obtient alors un rectangle translaté de base, adapté, en doublant le rectangle minimal par la symétrie glissée.

- Pour le type de frise F1m, on peut prendre comme rectangle minimal un rectangle dont l'un des côtés est inclus dans un des bords de la frise et un autre dans l'axe d de la bande, les autres côtés supportant un vecteur minimal. On obtient alors un rectangle translaté de base, adapté, en doublant le rectangle minimal par la symétrie d'axe d.

- Pour le type de frise F4, on peut prendre comme rectangle minimal un rectangle dont l'un des côtés est inclus dans un des bords de la frise, et un autre dans l'axe d de la bande, les deux autres côtés portant des axes de symétrie de la courbe, perpendiculaires à d et consécutifs. On obtient alors un rectangle translaté de base, adapté, en doublant tout d'abord le rectangle minimal par la symétrie d'axe d, puis en doublant de nouveau le rectangle ainsi obtenu grâce à une symétrie par rapport à l'un des autres côtés du rectangle minimal.

L'utilité de ces ensembles est l'**analyse**, mais surtout la **construction** de frises.

E. Construction d'une frise élaborée (Type F1g) ⏏

Voici un exemple de construction d'une frise plus élaborée, à partir de son type.

On choisit d'abord son type, d'après la classification du paragraphe D, par exemple, ici, F1g : la frise sera invariante par des translations, mais aussi par un **glissage** ayant pour axe l'axe de la bande, et de vecteur la moitié du **vecteur minimal**.

Le **rectangle minimal** est fondamental pour réaliser une frise un peu élaborée.

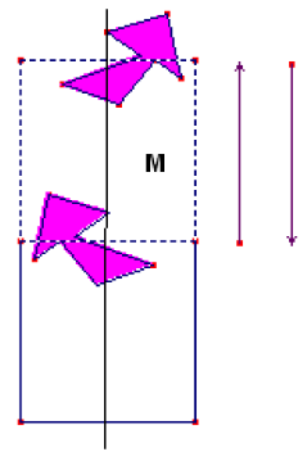
Le paragraphe D nous indique que le **rectangle minimal** a des côtés qui supportent la moitié d'un vecteur minimal, et que l'on obtient un rectangle translaté de base, adapté, en prenant le rectangle minimal et en le copiant par glissage.

Pour changer un peu, la bande de la frise sera verticale.

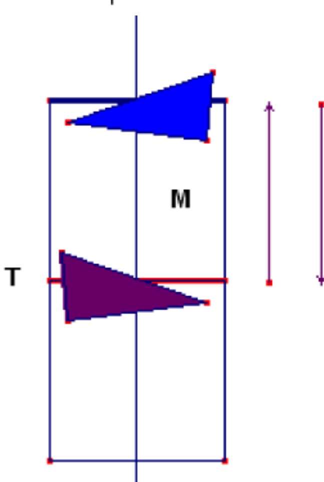
Sur la première figure,ci-contre, M désigne le rectangle minimal.

Pour visualiser le glissage, on a dessiné une flèche et son image par le glissage.

Le grand rectangle est le rectangle translaté de base.



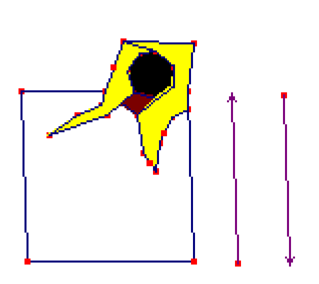
Pour réaliser un dessin esthétique, il est important de savoir que les bords opposés du rectangle minimal se recollent de la façon qu'évoque la figure ci-contre : la frontière en trait bleu épais se colle sur celle en trait rouge, avec une inversion de sens signalée par le fait que la flèche bleue se colle sur la flèche violette.

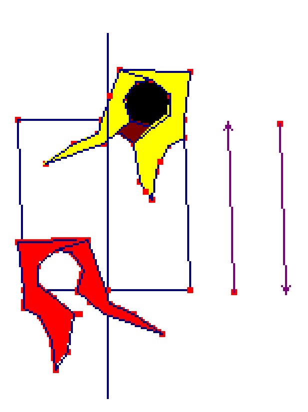


L'exemple qui suit a été réalisé avec le logiciel CABRI.

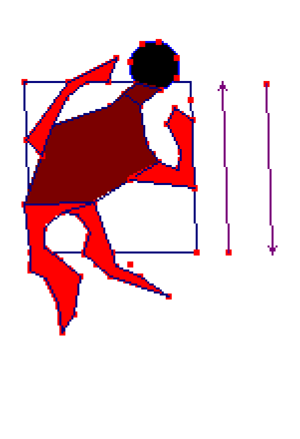
On souhaite dessiner une "pile" d'acrobates telle que la tête de l'acrobate inférieur s'emboîte entre les jambes de l'acrobate supérieur, suivant le recollement du rectangle minimal décrit plus haut (figure de gauche ci-dessous).

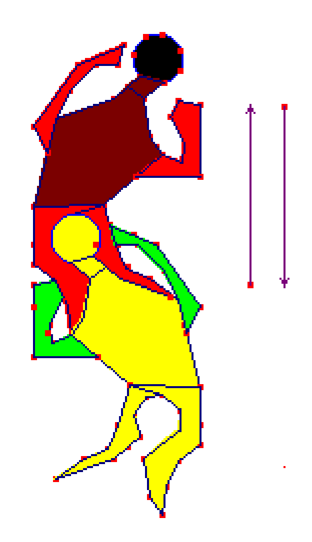
Mais alors les jambes jaunes vont venir se copier en rouge par glissage, et fournir celles de l'acrobate inférieur, dont la tête est déjà dessinée (figure de droite ci-dessous).





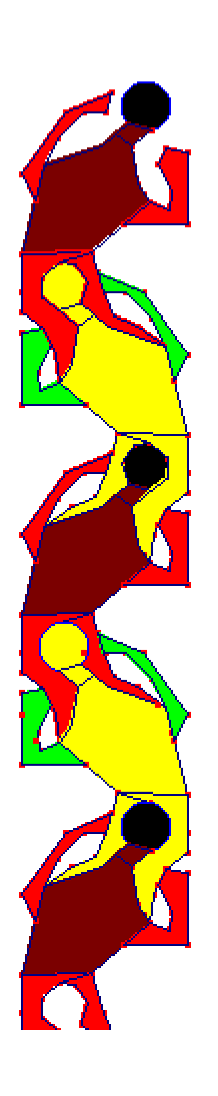
Il n'y a plus qu'à compléter l'acrobate inférieur (tronc et bras). Il constitue le **motif minimal** de la frise. En lui adjoignant son image par le glissage, on obtient un **ensemble translaté adapté** (figuratif) de la frise.

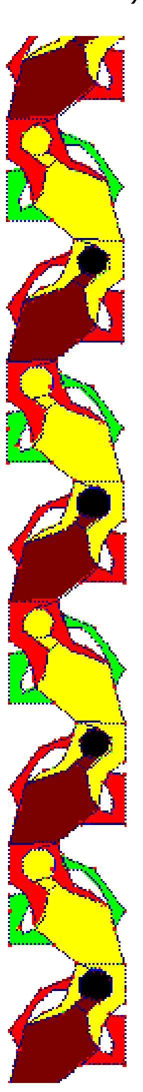




Il reste à répéter cet ensemble translaté par des translations.

On obtient une frise de type F1g. (On a ce type uniquement si on ne tient pas compte des couleurs, lesquelles ne sont ici que pour une visualisation commode).





La dernière figure est réalisée en juxtaposant plusieurs des images précédentes à l'aide d'un logiciel standard de traitement d'images (par copier/coller).

Pour aller plus loin

Les pavages permettent de réaliser des dessins encore plus spectaculaires, et encore plus intéressants du point de vue mathématique.

3.1. Notions générales sur les dessins bipériodiques

Équipe académique mathématiques
C. Drouin
Bordeaux, novembre 2002

Les dessins (ou pavages) bipériodiques sont le champ privilégié pour s'initier au type de problème qui nous intéresse : pavages, isométries, groupe d'isométries... Il s'agit tout simplement des ensembles (ou décors, voir ci-dessous) qui sont globalement invariants par deux translations "indépendantes". On appelle encore "Papiers peints" (en anglais : "Wallpapers") ce type de décors ou de pavages.

Cette fiche présente les connaissances de base sur le sujet des dessins bipériodioques. Elle indique comment les analyser.

Au sommaire de cette page

A. Dessins bipériodiques et translations

1. Dessin

On considère ici qu'un dessin dans le plan n'est autre qu'un sous-ensemble D du plan. Dans le cas par exemple d'un dessin en noir et blanc, on peut considérer que D est l'ensemble des points du plan en noir, l'ensemble complémentaire de D étant en blanc.

2. Bipériodicité

Soit D un dessin dans le plan, c'est-à-dire un sous-ensemble du plan. On dit que D est **bipériodique** si D est invariant par deux translations de vecteurs non colinéaires **u** et **v**.

On veut dire par là que l'image de D par t**u** coïncide exactement avec D lui-même, et que, de même, l'image de D par t**v** coïncide avec D.

On peut noter cela : t**u**(D) = D et t**v**(D) = D.

On peut exprimer cette propriété mathématique de façon concrète : si on décalque D, et si on fait glisser le calque, sans le faire tourner, (c'est-à-dire si on translate le calque), on peut de nouveau faire coïncider le dessin de D sur le calque avec D, et ce en allant dans deux directions différentes.

Remarque sur la définition de bipériodicité

3. Notion de décor et décor invariant

On peut aussi vouloir donner de l'importance aux couleurs de la figure. On parle alors de **décor** du plan. Dire qu'un décor est invariant par une translation t**u** du plan, c'est dire que toute partie P du décor se transforme par t**u** en une partie t**u**(P) ayant mêmes formes et mêmes couleurs.

On dit bien sûr qu'un décor est bipériodique s'il est invariant par deux translations de vecteurs non colinéaires.

Définition précise d'un déoor

4. Vecteurs de base

Définition

Dans le cas "ordinaire" (sous l'hypothèse de discrétion en particulier), parmi tous les couples (**u**,**v**) de vecteurs non colinéaires tels que les translations associées laissent toutes deux le dessin invariant, il existe des couples (**u**,**v**) de vecteurs de normes minimales.

On appelle alors **u** et **v** **vecteurs de base** ou **vecteurs minimaux** du dessin.

De même, les translations associées seront nommées "de base" ou "minimales".

Théorème

Si **u** et **v** sont des vecteurs de base du dessin bipériodique, alors toute translation t**w** du dessin est telle qu'il existe des entiers relatifs k et l avec : **w** = k.**u**+ l **v**.

Note sur les vecteurs minimaux et démonstration

Remarque
Dans toute la suite, on suppose que l'hypothèse de discrétion est vérifiée et en particulier qu'il existe des vecteurs minimaux.
Des précisions sur l'hypothèse de discrétion

Activité
Analyser un dessin ou un décor. Repérer deux translations minimales associées à des dessins (ou décors) bipériodiques. Savoir trouver la translation de vecteur k.**u** + l **v** , avec k et l entiers relatifs, envoyant tel motif sur tel autre, identique.

5. Ensemble translaté de base

Il s'agit d'une partie E du plan, fermée (c'est-à-dire : contenant sa frontière), connexe (c'est-à-dire d'un seul tenant), ayant la propriété suivante :

> " Les translatés de E par les translations de vecteurs k.u + l.v, avec k et l entiers relatifs, recouvrent totalement le plan, sans laisser de vide, et sans empiéter l'une sur l'autre, sinon par leurs frontières."

Autrement dit, les translatés de E réalisent un pavage du plan, invariant par les mêmes translations que le dessin lui-même.

(Pour les définitions de ce qu'est un pavage, et de ce qu'est l'invariance d'un pavage par une transformation, voir la fiche sur les pavages généraux.)

Remarques
1. Comme tout dessin bipériodique donne lieu à un pavage, et même à une infinité de pavages possibles, on parlera tout aussi bien de pavages que de dessins bipériodiques.

2. Tout parallélogramme dont les côtés portent les vecteurs **u** et **v**, est un ensemble translaté de base.
Mais la partie du dessin tracée dans ce parallélogramme n'a généralement pas une forme agréable. Souvent, le motif même du pavage, ou une réunion de motifs, fournit un ensemble translaté de base plus esthétique et plus commode.

3. Tous les ensembles translatés de base ont la même aire.

On parle bien sûr de **polygone translaté de base**, ou de **parallélogramme translaté de base** lorsque l'ensemble translaté de base est de forme particulière, ces formes étant souvent commodes.

Activité
Repérer de tels ensembles translatés de base sur des exemples de dessins ou pavages

Remarque
Il est très fréquent qu'un dessin bipériodique puisse être découpé en un pavage semi-régulier, par exemple avec deux modèles distincts de pavés. On en verra des exemples plus loin ici même ; on peut aussi en trouver, par exemple, dans "Le monde des pavages" (voir la bibliographie sur la page d'introduction).
Le même dessin, comme il est courant, peut donc être découpé suivant deux pavages distincts : un pavage en parallélogramme et un pavage en pavés ayant deux formes

différentes. On peut souvent y ajouter un troisième pavage, à l'aide d'un **ensemble minimal** (voir le paragraphe B ci-dessous).

B. Isométries associées à un dessin bipériodique

1. Réflexion glissée

En général, les dessins bipériodiques admettent d'autres isométries que des translations les laissant globalement invariants.

Outre les traditionnelles translations, rotations (dont symétrie centrale), réflexions (c'est-à-dire symétries orthogonales), on a également besoin de la **réflexion glissée**.

On appelle **réflexion glissée** la succession d'une réflexion s d'axe et d'une translation t**w** (dont le vecteur directeur dirige l'axe de la réflexion s). Mathématiquement, l'isométrie résultante est appelée composée des isométries s et t**w**, et notée t**w** o s.

Analyser une figure
Repérer les isométries laissant le dessin globalement invariant.

2. Transformation laissant le dessin globalement invariant

On dit qu'une transformation f laisse le dessin D globalement invariant si l'image de D par f coïncide exactement avec D lui-même, c'est-à-dire si f(D) = D.

Pour matérialiser cette propriété, on peut utiliser un papier calque. On décalque D. Dans le cas par exemple d'une rotation r de centre O et d'angle a, r laisse D invariant si, en faisant tourner le calque autour de O de l'angle a, D revient coïncider avec lui-même.

Une réflexion correspond à un retournement du calque.

De même, on dit qu'une isométrie f laisse invariant un décor lorsque toute partie P du décor se transforme par f en une partie f(P) ayant mêmes formes et mêmes couleurs.

Attention

Une isométrie f peut fort bien laisser les dessins (les formes) invariants et ne pas respecter les couleurs. Quand on recherche les isométries d'une figure, il faut spécifier s'il s'agit du décor coloré ou du seul dessin.

Analyser une figure
Tracer les axes de symétrie, placer les centres des rotations laissant le dessin invariant.
Il est conseillé pour cela d'utiliser une feuille de papier calque.
On peut remarquer qu'à l'intersection de deux axes, on a toujours un centre de rotation. Mais il peut y avoir d'autres centres.
On obtient aussi un ensemble de points et d'axes qui est essentiel pour l'étude du dessin bipériodique et qui en est comme le "squelette". On appellera cet ensemble : la trame du dessin.

Prérequis : réciproque d'une rotation, d'une translation, d'une réflexion.

3. Ensemble minimal

On appelle ensemble minimal une partie M du plan telle que, si l'on prend tous ses ensembles transformés f(M) par toutes les isométries f laissant le dessin invariant, les ensembles f(M), tous distincts, recouvrent le plan, sans empiéter l'un sur l'autre, sinon éventuellement à leurs frontières.

Autrement dit, les ensembles f(M) réalisent un pavage du plan.

On appellera motif minimal l'intersection du dessin, ou bien du décor, avec l'ensemble minimal.

On parle de **polygone minimal** ou de **parallélogramme minimal** lorsque l'ensemble minimal revêt une de ces formes.

Analyser une figure
Repérer un ensemble minimal d'un dessin isométrique

4. Dessin bipériodiques figuratifs

On appelle **dessin bipériodique figuratif** un dessin pour lequel il est possible de choisir un ensemble minimal qui ait une forme en elle-même figurative (un objet, un animal, un personnage). Autrement dit, les contours de l'ensemble minimal font partie du dessin. Le dessin entier apparaît alors comme la répétition d'une seule forme.

Il est souvent utile dans ce cas de colorer les différents exemplaires de l'ensemble minimal avec plusieurs couleurs, pour que les frontières entre eux soient plus visibles.

Le décor apparaît alors manifestement comme un pavage, le pavé naturel étant évidemment l'ensemble minimal à motif simple.

Ces pavages sont parmi les plus esthétiques.

5. Ensemble translaté adapté

Un **ensemble translaté adapté** pour un dessin ou un décor D est un ensemble translaté de base de D, qui a, de plus, la propriété d'être constitué de la réunion d'un ensemble minimal M et d'images de M par certaines isométries du pavage.

L'intérêt d'un ensemble translaté adapté E est qu'il fait apparaître certaines rotations, symétries, symétries glissées de D.

On parle bien sûr de **polygone translaté de base, adapté**, ou de **parallélogramme translaté de base, adapté,** pour parler d'ensembles translatés de base adaptés de formes particulières, ces formes étant souvent commodes.

> **Analyser une figure**
> Repérer un ensemble translaté adapté dans le cas d'un dessin isométrique

> **Activité mathématique**
> Composer entre elles des isométries du dessin.
> La transformation composée est encore une isométrie du dessin. De même, la transformation réciproque d'une isométrie du dessin est encore une isométrie du dessin. On peut exprimer cela de la façon suivante : l'ensemble des isométries d'un dessin bipériodique est un groupe.

C. Classification des dessins bipériodiques

En faisant l'hypothèse de discrétion, on peut faire une liste de toutes les possibilités pour l'ensemble des isométries du dessin bipériodique. On peut ainsi les classer, et ce classement correspond bien à l'aspect que peuvent revêtir pour l'oeil les différents dessins bipériodiques.

Théorème 1 : classification des dessins bipériodiques

Il y a exactement **17 types de dessins bipériodiques** vérifiant l'hypothèse de discrétion, chacun de ces types correspondant à une possibilité pour l'ensemble G des isométries du dessin, et à un modèle de trame du dessin (nature des isométries, dispositions relatives de leurs éléments géométriques: vecteurs, centres, axes).

Ces 17 familles sont décrites dans les fiches suivantes :

La fiche 3.2 présente **un seul** type de dessin bipériodique, qui se caractérise par le fait que les seules isométries du dessin sont des translations.

La fiche 3.3. présente les **huit** types de dessins bipériodiques qui admettent comme isométries des rotations qui ne sont pas des symétries centrales.

La fiche 3.4. présente les **huit** types de dessins bipériodiques qui n'admettent pas comme isométrie d'autres rotations que les symétries centrales.

Notations

Le théorème de classification repose principalement sur un théorème donnant les angles possibles de rotation. On note désormais D un dessin ou un décor bipériodique vérifiant l'hypothèse de discrétion, et G l'ensemble des isométries de D.

Théorème 2 : classification des rotations de G

Les rotations laissant D invariant ont nécessairement pour angle, au signe près : 180° , 120°, 90°, ou 60°.

De plus, en supposant que D admette une rotation d'angle a parmi les angles ci-dessus, l'ensemble Ca des centres des rotations d'angle a laissant D invariant est constitué d'un réseau de points, aux sommets d'un pavage du plan par des triangles équilatéraux, des carrés ou des parallélogrammes, suivant la valeur de a.

Démonstration du théorème de classification des rotations des dessins bipériodiques

Esquisse de démonstration du théorème 1 de classification des dessins bipériodiques

3.2. Réalisation de dessins bipériodiques translatés

Équipe académique mathématiques
C. Drouin
Bordeaux, novembre 2002

On donne ici une méthode permettant de réaliser des pavages invariants par deux translations : on part des deux translations de base, qui correspondent à deux vecteurs de base **u** et **v**, puis on considère un **parallélogramme de base** : c'est tout simplement un parallélogramme dont les côtés portent les vecteurs **u** et **v**.

Au sommaire de cette page

A. Constructions simples ("art abstrait")

On décore tout simplement, par exemple, le parallélogramme de base de figures géométriques, en utilisant éventuellement des couleurs. Ceci peut se faire avec plus ou moins de virtuosité.

Puis on reproduit ce parallélogramme par les translations de vecteurs **u** et **v**. On pave ainsi le plan.

Pour réaliser ces constructions, on peut utiliser un logiciel de géométrie (type CABRI), ou des logiciels spécifiques pour les pavages (type PAVAGE, KALI ou ORNAMENT).

B. Constructions à motif simple (figuratives et plus artistiques)

Si l'on veut obtenir des pavages plus artistiques, par exemple avec un seul dessin qui s'emboîte avec des copies de lui-même, sans laisser de blanc, il est nécessaire de procéder de façon plus fine.

Il s'agit de déformer ce parallélogramme de base, mais en faisant toujours en sorte que le motif obtenu reste invariant par les deux translations de vecteurs **u** et **v**. On obtient ainsi un **ensemble translaté de base**.

On peut réaliser ce motif simplement en dessinant, en translatant, en gommant.

On peut aussi découper le motif sur l'un des côtés du parallélogramme et le rajouter sur l'autre côté, après translation de vecteur **u** ou **v** (technique du puzzle).

Ces constructions peuvent être réalisées avec un logiciel de géométrie (du type CABRI).

L'ensemble translaté de base ayant été réalisé, il suffit de le déplacer par les translations de vecteurs **u** et **v** pour paver le plan.

On consultera avec profit la page 18 de l'ouvrage "Le monde des pavages" (voir la bibliographie dans la page d'introduction).

Exemple

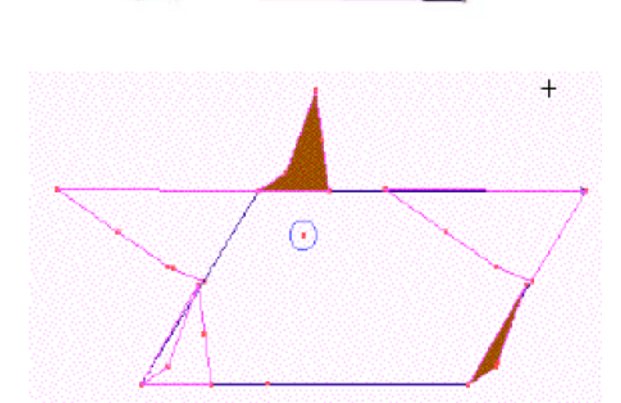
L'exemple qui suit a été réalisé avec le logiciel CABRI. On se sert de façon essentielle de l'outil "polygone" de CABRI.

On souhaite dessiner une tête de jeune vache.

On part donc d'un parallélogramme allongé.
Les deux vecteurs de base du pavage, **u** et **v**, sont portés par les côtés du parallélogramme. À gauche en haut, on fait

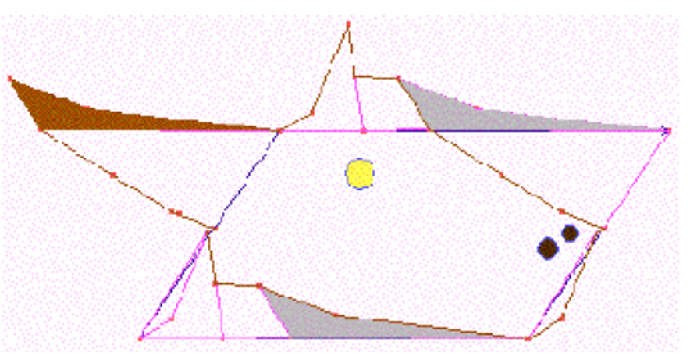
sortir du parallélogramme ce qui sera la corne droite de la vache.

Il faut alors translater cette corne vers la droite, dans l'intérieur du parallélogramme. La forme translatée devra être **découpée** du parallélogramme. Son trait inférieur correspond alors à la partie supérieure du museau de la vache.



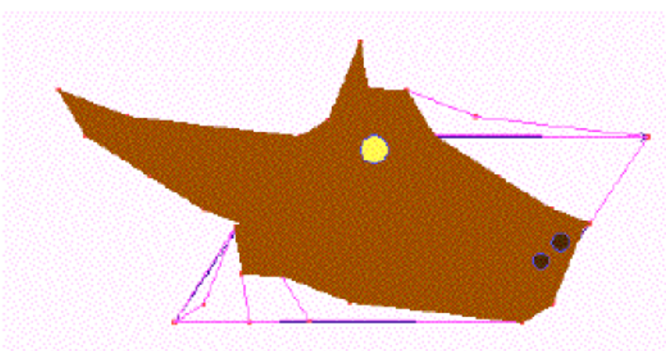
Dessinons maintenant la corne gauche. Elle sort vers le haut à gauche du parallélogramme, donc il faut enlever son translaté dans le bas du parallélogramme. Dans le même mouvement, si on allonge un peu le museau à droite en bas, il faut enlever son translaté à gauche en bas.

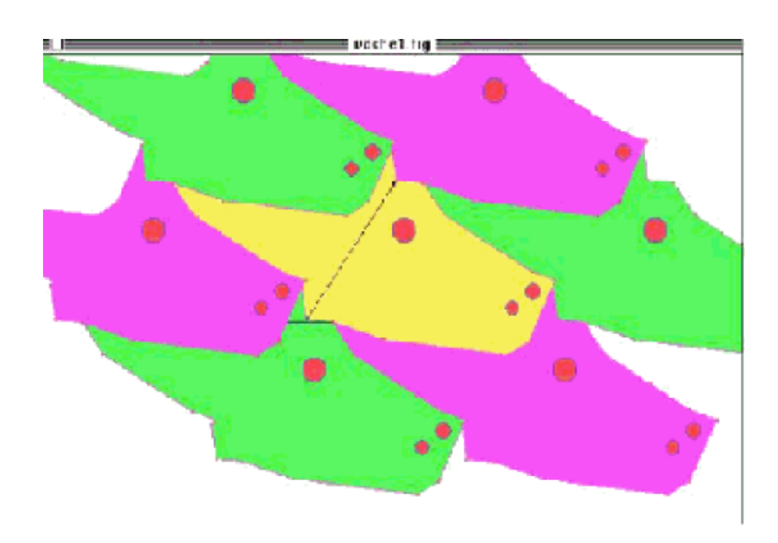
De façon plus subtile (figure suivante) : enlevons un peu de matière en bas à droite du parallélogramme. Il faudra le rajouter en haut à droite, ce qui ne nous convient pas. Tout simplement, on la translate vers la gauche pour épaissir un peu la corne droite vers le haut. On rehausse aussi un peu le front devant la corne gauche, ce qui enlève son translaté en bas.

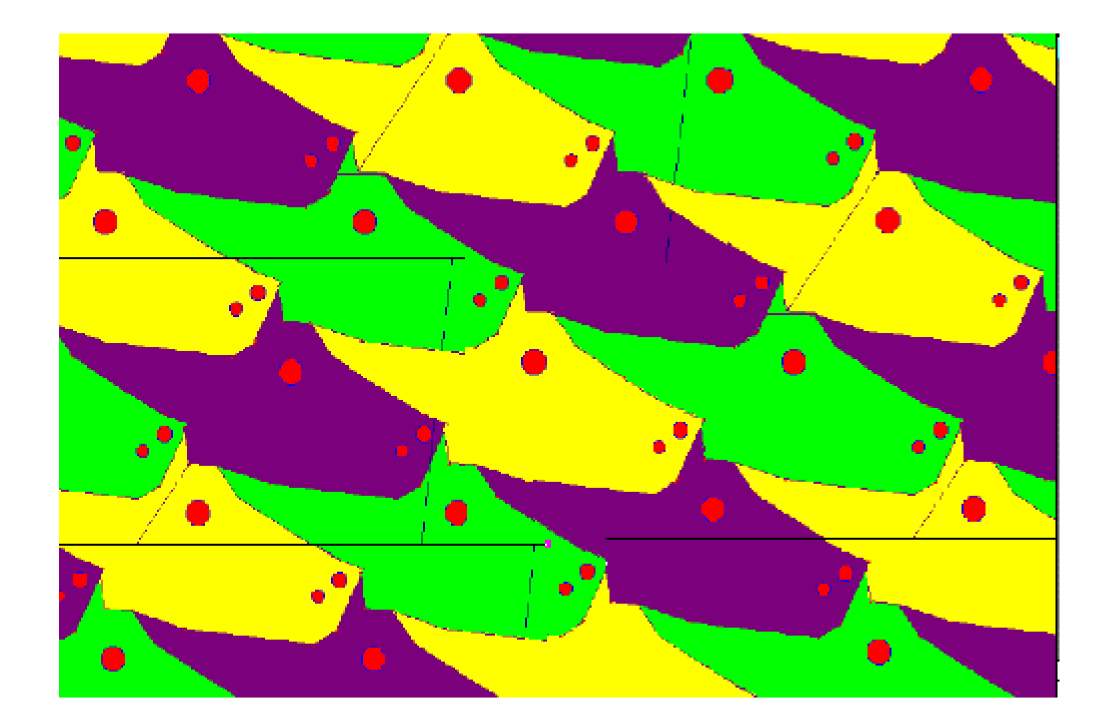


La figure suivante montre le motif (ensemble translaté de base).

Il suffit alors de translater ce motif pour paver le plan.







La dernière figure est réalisée en juxtaposant plusieurs des images précédentes à l'aide d'un logiciel standard de traitement d'images (par copier/coller)

Pour aller plus loin

Pour réaliser des pavages originaux et plus spectaculaires, on peut construire des pavages invariants par d'autres isométries que les translations.

Haut de page

sommaire parcourir le dossier

3.3. Réalisation de dessins bipériodiques rotatifs

Équipe académique mathématiques
C. Drouin
Bordeaux, novembre 2002

sommaire parcourir le dossier

On considère ici les dessins bipériodiques qui sont invariants par des rotations qui ne sont pas des symétries centrales.

Rappelons le **théorème fondamental** sur les rotations laissant invariantes un dessin (ou décor) bipériodique (voir fiche 3.1.) :

> Les rotations laissant D invariant ont nécessairement pour angle, au signe près, 0°, 180° , 60°, 90°, ou 120°.

De plus, en supposant que D admette une rotation d'angle a parmi les angles ci-dessus, l'ensemble Ga des centres des rotations d'angle a laissant D invariant est constitué d'un réseau de points, aux sommets d'un pavage du plan par des triangles équilatéraux, des carrés, des parallélogrammes ou des hexagones. Le type de dessin dépend de la valeur de a.

On a également le résultat suivant (**résultat 2**) :

> Si D est invariant par une rotation d'angle a et si Ca est l'ensemble de tous les centres des rotations d'angle a laissant D invariant, alors Ca est lui-même invariant par toutes les rotations et toutes les translations laissant D invariant.

Au sommaire de cette page

A. Classification des dessins bipériodiques rotatifs

Analyser le dessin

Comme toujours, pour analyser un dessin doublement périodique, il faut mettre en évidence les vecteurs des translations de base, les centres des rotations, les axes de symétrie, les réflexions glissées...

On peut également repérer les **parallélogrammes de base**, et mieux encore, **les motifs minimaux**, **les polygones minimaux** et **les ensembles translatés adaptés** construits à partir du polygone minimal ou du motif minimal.

Classification de ces dessins

Une première classe de dessins rotatifs concerne les dessins qui n'admettent comme isométries que des rotations et évidemment des translations. Cette classe regroupe les cas suivants :

- Le dessin admet comme seules isométries, en plus des translations, des rotations d'angles + ou - 120° (tiers de tours directs ou indirects). **Dessin de type p3** (R3 Kangourou). Les centres des rotations sont alors au sommet d'un pavage du plan par des triangles équilatéraux dont les côtés sont des vecteurs de translations minimales.
- Le dessin admet comme seules isométries, en plus des translations, des rotations d'angles + ou - 90°(quarts de tours directs ou indirects) et 180° (symétries centrales). **Dessin de type p4** (R4 Kangourou). Mis ensemble, les centres de toutes les rotations sont alors aux sommets d'un pavage du plan par des carrés. Les sommets sont alternativement centres de symétrie centrale (uniquement) et centres de quarts de tour.
- Le dessin admet comme seules isométries, en plus des translations, des rotations d'angles + ou - 60°, + ou - 120° et 180°. **Dessin de type p6** (R6 Kangourou). Mis ensemble, les centres de toutes les rotations d'angles 120° sont

alors aux sommets d'un pavage du plan par des triangles équilatéraux. Il en va de même du sous-ensemble formé des seuls centres de rotations d'angle 60°. Si l'on prend deux de ces derniers qui soient voisins, leur milieu est le centre d'une symétrie centrale du dessin.

Une deuxième classe de dessins rotatifs concerne les dessins qui admettent des rotations dont l'angle minimal a est un n-ième de tour, avec n = 3, 4 ou 6, qui admettent aussi des symétries axiales et qui vérifient de plus la condition : par tout centre de rotation d'angle a du dessin, passe au moins un axe de symétrie (en fait il en passe alors exactement n, avec a = 360°/n, et n = 3, 4 ou 6). Cette deuxième classe regroupe les **dessins de types p3m1, p4m, p6m** (Kangourou M3, M4, M6), qui correspondent respectivement à des angles minimaux de rotation de 120° (n = 3), 90° (n = 4), 60° (n = 6).

Une dernière classe de dessins rotatifs concerne les dessins qui admettent des rotations dont l'angle minimal a est un n-ième de tour, avec n = 3, 4 ou 6, et qui admet de plus des symétries axiales,mais tels que certains centres de rotations d'angle a ne soient sur aucun axe de symétrie. Cette deuxième classe regroupe les **dessins de types p31m et p4g**, (Kangourou M3R3, et M2R4), qui correspondent respectivement à des angles minimaux de rotation de 120° (n = 3) et 90° (n = 4).

> **Activités mathématiques**
> Pour telle ou telle catégorie de pavages rotatifs, observer et décrire la "trame" de ce pavage, c'est-à-dire les positions mutuelles des vecteurs des translations, des centres des rotations, des axes de symétrie.
> Déterminer graphiquement un **parallélogramme de base du pavage**, et, mieux encore, **un motif minimal**, **un polygone minimal** et les **ensembles translatés** adaptés construits à partir du polygone minimal ou du motif minimal.
> Éventuellement, démontrer que dans tel type de pavage, les positions mutuelles des vecteurs des translations, des centres de symétrie des rotations, des axes de symétrie, sont nécessairement celles qui sont constatées visuellement. (On pourra pour cela composer les diverses isométries du pavage).

B. Méthode de construction de dessins bipériodiques rotatifs

On entreprend ici de construire des dessins rotatifs.

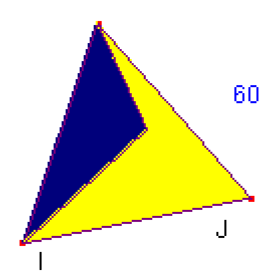
Pour pouvoir construire soi-même un dessin, il faut faire à l'envers la démarche d'analyse précédente. On va partir cette fois du polygone minimal, des isométries du dessin et d'un ensemble adapté de base, pour arriver à dessiner le dessin de type donné.

Voici la méthode sur un exemple. Pour généraliser, voir le paragraphe suivant qui donne dans chaque cas le polygone minimal.

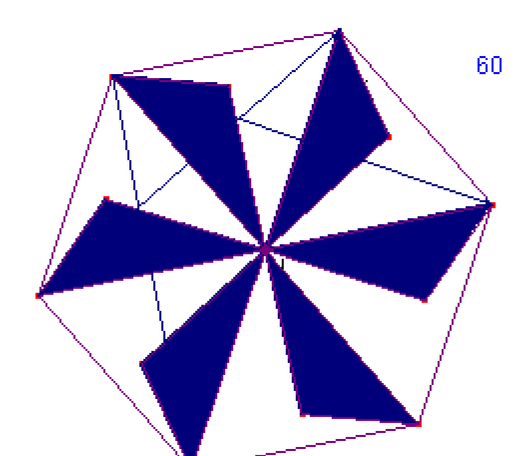
L'exemple traité a pour but la construction, à l'aide du logiciel Cabri-géomètre, d'un dessin de type **p6** (alias dessin ; voir les caractéristiques dans le paragraphe B).

D'après le paragraphe C, le **polygone minimal** correspondant est (par exemple) un triangle équilatéral dont un sommet, noté I, est centre d'une rotation de 60° du pavage, tandis que les deux autres sommets sont des centres de rotations de 120°.

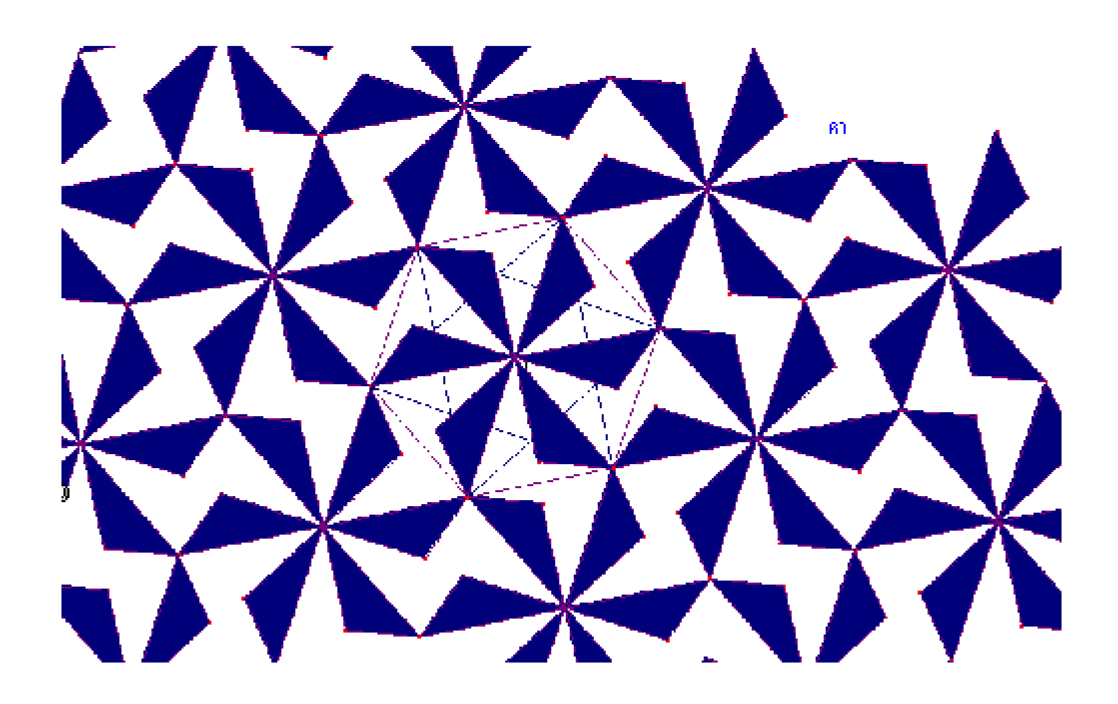
Dans un premier temps, on décore ce polygone minimal.



Puis l'on passe à un **polygone translaté adapté** correspondant, qui, comme indiqué au paragraphe C, est l'hexagone formé des images successives du polygone minimal par la rotation de centre I et d'angle 60°. Voici le polygone translaté adapté, décoré :



Il ne reste plus qu'à appliquer à cet ensemble transaté de base les translations minimales (dont les vecteurs sont portés par des "petites diagonales").



On obtient ainsi un dessin de type **p6** où l'on voit apparaître, outre les centres de sixièmes de tour, également les centres de tiers de tour et les centres de demi-tours.

Pour plus de beauté et de virtuosité dans la construction des dessins – comme dans ceux d'Escher ou de M. Raba (voir "Le monde des pavages" cité dans la bibliographie) – et pour la réalisation de pavages figuratifs à motifs simples, il faut comprendre mieux encore les propriétés du polygone minimal. Voir pour cela la fiche 3.5 et l'ouvrage cité.

Le paragraphe qui suit donne, pour tous les types de dessins étudiées dans cette fiche, les **polygones minimaux** ainsi que les **polygones translatés adaptés** correspondants.

C. Polygones minimaux et polygones translatés des dessins rotatifs

Soit pour analyser, soit surtout pour construire un dessin de type donné parmi ceux étudiés ici, on a besoin de la forme d'un **polygone minimal** et de celle du **polygone translaté adapté** correspondant. Pour les définitions de ces concepts, voir la fiche 3.1 d'introduction aux pavages bipériodiques.

Première classe de dessins rotatifs (types p3, p4, p6)

¤ Dans le cas du type de dessin **p3**, on peut prendre comme polygone minimal un **losange** formé de deux triangles équilatéraux dont les sommets sont des centres voisins de tiers de tour laissant le dessin invariant. Soit I un sommet du losange commun aux deux triangles. En prenant le losange initial et ses deux images par les deux rotations de

centre I et d'angles +120° et -120°, on obtient pour polygone translaté adapté un **hexagone** régulier inscriptible. Les vecteurs des translations minimales sont portés par des "petites diagonales" de cet hexagone.

¤ Dans le cas du type de dessin **p4**, on peut prendre comme polygone minimal un **triangle rectangle isocèle** dont les trois sommets sont voisins des centres des quarts de tour du dessin. Soit I le sommet principal de ce triangle rectangle isocèle. En prenant le triangle initial et ses images respectives par les rotations de centre I et d'angles +90°, 180°, -90°, on obtient pour polygone translaté adapté un parallélogramme de base qui n'est autre qu'un **carré.**

¤ Dans le cas du type de dessin **p6**, on peut prendre comme polygone minimal un **triangle équilatéral** dont un des sommets, I, est centre d'un sixième de tour du dessin, et dont les deux autres sommets sont des centres de tiers de tour voisins de I. En prenant le triangle initial et ses images respectives par les rotations de centre I et d'angles +60°, +120°, 180°, -120°, -60°, on obtient un **hexagone** régulier inscriptible pour polygone translaté adapté. Les vecteurs des translations minimales sont portés par des "petites diagonales" de cet hexagone.

Deuxième classe de dessins rotatifs (types p3m1, p4m, p6m)

¤ Dans le cas du type de dessin **p3m1**, on peut prendre comme polygone minimal un **triangle équilatéral** dont les sommets sont des centres de tiers de tour du dessin. Soit I un sommet du triangle. En doublant ce triangle grâce à une symétrie par rapport à un des côtés d'extrémité I, on obtient un losange. En prenant ce losange et ses images par les deux rotations de centre I et d'angles +120° et -120°, on obtient un **hexagone** régulier inscriptible pour polygone translaté adapté. Les vecteurs des translations minimales sont portés par des "petites diagonales" de cet hexagone.

¤ Dans le cas du type de dessin **p4m**, on peut prendre comme polygone minimal un **triangle** IJK **rectangle isocèle** en K, tel que I et J soient des centres voisins des quarts de tour laissant le dessin invariant, et K le centre d'une symétrie centrale du dessin. En doublant ce triangle par symétrie par rappport au côté [IK], on obtient un nouveau triangle rectangle isocèle, de sommet principal I. En prenant ce nouveau triangle et ses images respectives par les rotations de centre I et d'angles +90°, 180°, -90°, on obtient pour polygone translaté adapté un parallélogramme de base qui est un **carré**.

¤ Dans le cas du type de dessin **p6m**, on peut prendre comme polygone minimal un **demi-triangle équilatéral** dont un des sommets, I, est centre d'un sixième de tour du dessin (angle en I : 30°), dont un autre sommet, J, est un centre de tiers de tour voisin de I, (angle en J : 60°), dont le troisième sommet, K, est seulement un centre de symétrie du dessin (angle en K : 90°). En doublant ce triangle par symétrie par rappport au côté [IK], on obtient un triangle équilatéral dont un sommet est I. En prenant ce triangle équilatéral et ses images par les rotations de centre I et d'angles respectifs +60°, +120°, 180°, -120°, -60°, on obtient pour polygone translaté adapté un hexagone régulier inscriptible. Les vecteurs des translations minimales sont portés par des "petites diagonales" de cet hexagone.

Troisième classe de dessins rotatifs (types p31m, p4g)

¤ Dans le cas du type de dessin **p31m**, on peut prendre comme polygone minimal un **triangle équilatéral** dont tous les sommets sont des centres de tiers de tour du dessin. Soit I un sommet du triangle. En doublant ce triangle grâce à une symétrie par rapport à un des côtés d'extrémité I, on obtient un losange. En prenant ce losange et ses images par les deux rotations de centre I et d'angles +120° et -120°, on obtient pour polygone translaté adapté un **hexagone** régulier inscriptible. Les vecteurs des translations minimales sont portés par des "petites diagonales" de cet hexagone.

¤ Dans le cas du type de dessin **p4g**, on peut prendre comme polygone minimal un **triangle rectangle isocèle** dont le sommet principal, noté I, est le centre d'un quart de tour du dessin invariant, et les deux autres sommets les centres voisins de symétries

centrales du dessin. En doublant ce triangle par symétrie par rappport à sa base, on obtient un carré. En prenant ce carré et ses images par les rotations de centre I et d'angles respectifs +90°, 180°, -90°, on obtient pour polygone translaté adapté un parallélogramme de base qui est aussi un **carré**.

Pour plus de beauté et de virtuosité dans la construction des dessins – comme dans ceux d'Escher ou de M. Raba (voir "Le monde des pavages" cité dans la bibliographie) – et pour la réalisation de pavages figuratifs à motifs simples, il faut comprendre mieux encore les propriétés du polygone minimal. Voir pour cela la fiche 3.5 et l'ouvrage cité.

Haut de page

sommaire parcourir le dossier

3.4. Réalisation de dessins symétriques glissés

Équipe académique mathématiques
C. Drouin
Bordeaux, novembre 2002

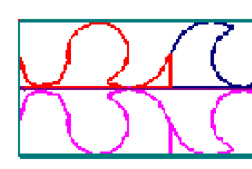
sommaire parcourir le dossier

On ne considère ici que des dessins doublement périodiques ayant les deux propriétés suivantes :

¤ Ils sont invariants par des symétries centrales, ou par des symétries axiales, ou par des symétries glissées.

¤ Ils ne sont invariants par aucune rotation, sauf, éventuellement, des symétries centrales.

Au sommaire de cette page



A. Analyse de dessins symétriques et glissés

Analyser le dessin

Comme toujours, pour analyser un dessin doublement périodique, il faut mettre en évidence les vecteurs des translations de base, les axes de symétrie, les centres des rotations (ici des demi-tours), les réflexions glissées...

On peut également repérer les **parallélogrammes de base**, et mieux encore, **les motifs minimaux**, **les polygones minimaux** et les **ensembles translatés adaptés** construits à partir du polygone minimal ou du motif minimal.

Classification de ces dessins

On peut démontrer que l'on peut classifier les dessins ainsi déterminés en distinguant les cas suivants :

- Dessin de type **pm** (M1 kangourou). Le dessin admet des axes de symétrie tous parallèles, mais pas de centre de symétrie. Il n'admet pas de symétries glissées autres que celles composées de réflexions et de translations du dessin.

- Dessin de type **p2** (R2 kangourou). Le dessin admet des centres de symétrie, mais pas de symétrie glissée ni de symétrie axiale.

- Dessin de type **pg** (M0g kangourou). Le dessin admet des symétries glissées, mais pas de symétrie axiale ni centrale.

- Dessin de type **cm** (M1g kangourou). Le dessin admet des axes de symétrie tous parallèles, mais pas de centre de symétrie. Il admet des symétries glissées autres que celles composées de réflexions et des translations du dessin.

- Dessin de type **pmg** (M1R2). Le dessin admet des axes de symétrie tous parallèles, ainsi que des centres de symétrie.

- Dessin de type **pgg** (M0R2). Le dessin n'admet pas de réflexion, mais admet des réflexions glissées et des symétries centrales.

- Dessin de type **pmm** (M2). Le dessin admet deux ensembles de réflexions, chacun correspondant à une direction des axes de symétrie, ces deux directions étant orthogonales entre elles. Les seuls centres de symétrie sont à l'intersection des axes de symétrie.

- Dessin de type **cmm** (M2R2). Le dessin admet deux ensembles de réflexions, chacun correspondant à une direction des axes de symétrie, ces deux directions étant orthogonales entre elles. Les intersections des axes sont bien sûr des centres de symétrie, mais il y a d'autres centres de symétrie, à mi-distance entre les axes.

> **Activités mathématiques**
> Pour telle ou telle catégorie de pavages rotatifs, observer et décrire la "trame" de ce pavage, c'est-à-dire les positions mutuelles des vecteurs des translations, des centres et des axes de symétrie, des axes et des vecteurs des glissages.

Déterminer graphiquement **un parallélogramme de base** du pavage et, mieux encore, **un motif minimal**, **un polygone minimal** et les **ensembles translatés adaptés** construits à partir du polygone minimal ou du motif minimal.
Éventuellement, démontrer que dans tel type de pavage, les positions mutuelles des vecteurs des translations, des centres de symétrie des rotations, des axes de symétrie, sont nécessairement celles qui sont constatées visuellement. On pourra pour cela composer les diverses isométries du pavage.

Par exemple, répondre mathématiquement aux questions suivantes :
- Pourquoi l'intersection de deux axes de symétrie est-elle toujours un centre de symétrie ?
- On se place dans le cas où le dessin admet deux réflexions d'axes parallèles, translatés l'un de l'autre par $t_{\mathbf{w}}$, le vecteur **w** étant normal aux axes. Pourquoi la translation $t_{2\mathbf{w}}$ laisse-t-elle alors le dessin invariant ?
Pour répondre mathématiquement à ces questions, il faut déterminer la composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires, ou d'axes parallèles.

B. Méthode de construction des dessins symétriques glissés

On entreprend ici de construire des dessins symétriques ou glissés.

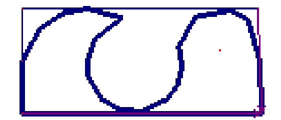
Pour pouvoir construire soi-même un dessin, il faut faire à l'envers la démarche d'analyse précédente. On va partir cette fois du **polygone minimal**, des **isométries du dessin** et du **parallélogramme adapté de base**, pour arriver à dessiner notre dessin de type donné.

Voici un exemple utilisant l'outil "polygone" de CABRI-GÉOMÈTRE (pour généraliser, voir le paragraphe suivant qui donne dans chaque cas le polygone minimal).

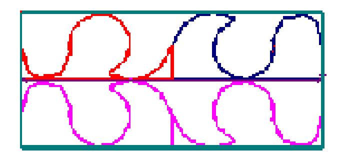
Il s'agit de construire un dessin, sur le thème des vagues, de type **pmg** (voir les caractéristique dans le paragraphe A).

Comme exposé dans le paragraphe C, le polygone minimal correspondant est (par exemple) un rectangle, dont deux côtés parallèles sont des axes de symétrie du dessin, et dont les milieux des autres côtés sont des centres de symétries du même dessin.

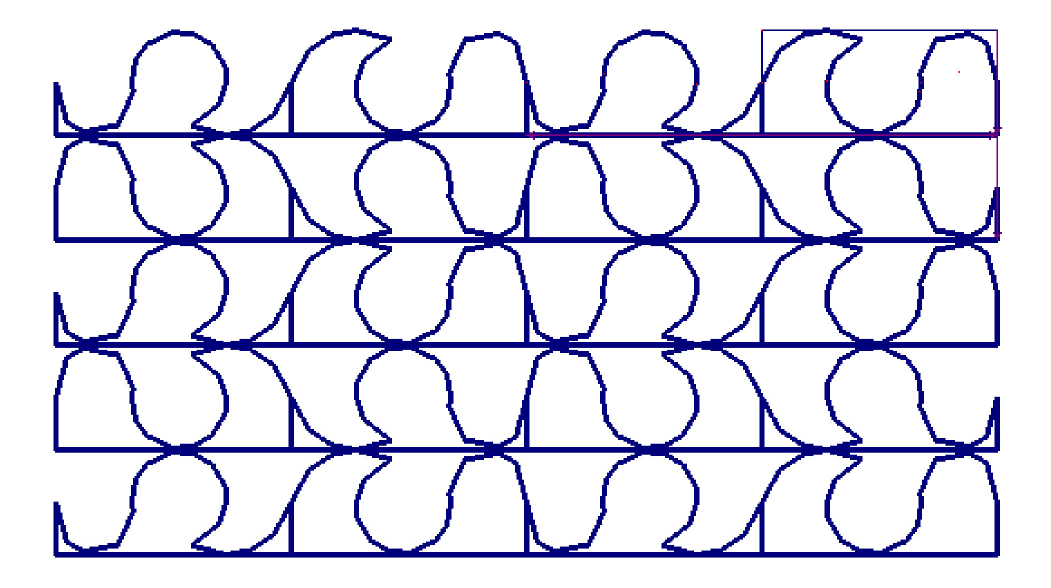
On suppose que les axes de symétrie sont portés par les côtés horizontaux du rectangle minimal et que les centres de symétrie sont les milieux des côtés verticaux. On choisit le motif minimal en faisant en sorte que le dessin passe par les centres de symétrie aux milieux des côtés verticaux.



Comme spécifié ci-dessus, on passe du motif minimal au rectangle minimal adapté en effectuant une symétrie par rapport à un centre de symétrie, puis une symétrie axiale par rapport à un côté horizontal :

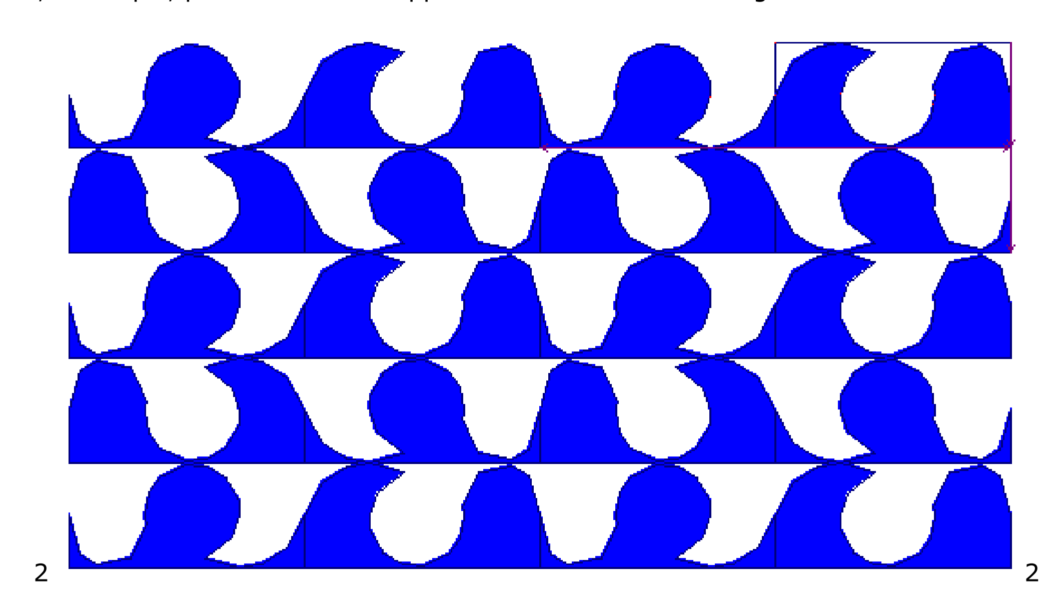


On obtient l'ensemble du dessin en translatant le parallélogramme (rectangle) minimal par rapport à ses côtés :



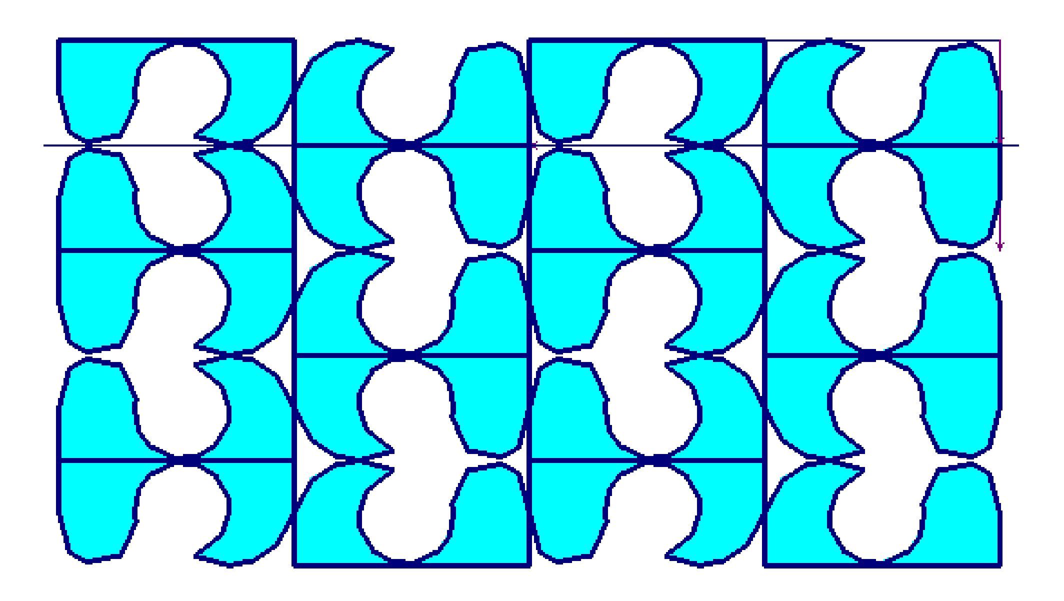
On voit ainsi apparaître le dessin avec des vagues, de type **pmg**. Celui-ci admet aussi un glissage, composé d'une réflexion et d'une symétrie centrale du dessin.

Du pur point de vue esthétique – et non plus mathématique –, on pourra décorer le dessin, le remplir, pour mieux faire apparaître l'idée initiale de vagues :



Attention cependant : ainsi rempli, si on s'oblige à tenir compte des couleurs, le dessin n'est plus de type **pmg**, mais seulement de type **pg**. Il n'y a plus aucune symétrie, que des glissages.

En toute rigueur, le dessin rempli de type **pmg** est le suivant :



...mais on perd l'idée de vague (on pourrait modifier ce dessin pour y faire apparaître divers types d'oiseaux...).

Pour plus de beauté et de virtuosité dans la construction des dessins – comme dans ceux d'Escher ou de M. Raba (voir "Le monde des pavages" cité dans la bibliographie) – et pour la réalisation de pavages figuratifs à motifs simples, il faut comprendre mieux encore les propriétés du polygone minimal. Voir pour cela la fiche 3.5 et l'ouvrage cité.

Le paragraphe C qui suit donne les **polygones minimaux** et les **polygones translatés adaptés** pour toutes les classes de dessins étudiées dans cette fiche.

C. Polygones minimaux des dessins symétriques et glissés

Soit pour analyser, soit surtout pour construire un dessin de type donné parmi ceux étudiés ici, on a besoin de la forme d'un **polygone minimal** et de celle du **parallélogramme de base adapté** correspondant ou, lorsque ce dernier n'existe pas, du **polygone translaté adapté** correspondant.

- Dans le cas du type de dessin **pm**, on peut prendre comme polygone minimal un rectangle dont un des côtés est axe de symétrie du dessin. En doublant le rectangle par symétrie relativement à cet axe, on obtient un parallélogramme de base adapté qui est un rectangle.

- Dans le cas du type de dessin **p2**, on peut prendre comme polygone minimal un parallélogramme dont les sommets ainsi que les milieux de deux côtés opposés sont des centres de symétrie du dessin, voisins entre eux. En doublant le parallélogramme par symétrie par rapport à l'un de ces points, on obtient un parallélogramme de base adapté.

- Dans le cas du type de dessin **pg**, on peut prendre comme polygone minimal un rectangle dont un côté porte un vecteur d'une translation minimale du dessin, tandis que les deux côtés qui lui sont orthogonaux portent des axes de glissage du dessin, ainsi que la moitié d'un autre vecteur de translation minimale du dessin. En doublant ce rectangle par glissage ayant pour axe l'un des ses côtés, on obtient un parallélogramme de base adapté, qui est lui aussi un rectangle.

- Dans le cas du type de dessin **cm**, on peut prendre comme polygone minimal un rectangle dont deux côtés opposés portent des axes de symétrie consécutifs du dessin, ainsi que le vecteur d'un glissage minimal, et dont les diagonales portent les vecteurs des translations minimales du dessin. En doublant ce rectangle par symétrie par rapport à un de ses côtés, on obtient un polygone translaté adapté qui est un rectangle. Dans ce cas, il n'existe pas de parallélogramme de base qui soit adapté. Remarquons au passage que les parallélogrammes de base sont des losanges.

- Dans le cas du type de dessin **pmg**, on peut prendre comme polygone minimal un rectangle dont deux côtés opposés portent deux axes de symétrie parallèles consécutifs du dessin, et dont les autres côtés ont pour milieu des centres de symétries du dessin. En faisant une symétrie centrale par rapport à un de ces points, puis une réflexion par rapport à un de ces côtés, on obtient un parallélogramme de base, adapté, qui est ici un rectangle.

- Dans le cas du type de dessin **pgg**, on peut prendre comme polygone minimal un rectangle dont les quatre sommets sont des centres de symétrie du dessin, voisins entre eux, et admettant comme axe de symétrie un axe de symétrie d'un glissage du dessin. En doublant le rectangle à l'aide de ce glissage, puis en doublant de nouveau grâce à une symétrie centrale, on obtient un parallélogramme de base, adapté, qui est un rectangle.

- Dans le cas du type de dessin **pmm**, on peut prendre comme polygone minimal un rectangle dont les quatre côtés portent des axes de symétrie du dessin, voisins entre eux. Par deux symétries axiales successives ayant pour axes deux côtés perpendiculaires du rectangle minimal, on obtient à partir de ce rectangle un parallélogramme de base, adapté.

- Dans le cas du type de dessin **cmm**, on peut prendre comme polygone minimal un rectangle dont trois côtés portent des axes de symétrie du dessin, voisins entre eux, et dont le quatrième a pour milieu un centre de symétrie. En faisant une symétrie centrale par rapport à ce point, puis successivement deux réflexions par rapport aux côtés du rectangle minimal, on obtient un parallélogramme de base, qui est ici un rectangle, d'aire huit fois plus grande que le rectangle minimal.

Pour plus de beauté et de virtuosité dans la construction des dessins – comme dans ceux d'Escher ou de M. Raba (voir "Le monde des pavages" cité dans la bibliographie) – et pour la réalisation de pavages figuratifs à motifs simples, il faut comprendre mieux encore les propriétés du polygone minimal. Voir pour cela la fiche 3.5 et l'ouvrage cité.

3.5. Réalisation de dessins bipériodiques figuratifs

Équipe académique mathématiques
C. Drouin
Bordeaux, novembre 2002

Au sommaire de cette page

A. Principe

Cette fiche présente la réalisation de pavages plus esthétiques, dits figuratifs.

Dans ce cas, **l'ensemble minimal est construit avec une forme figurative (un objet, un animal, un personnage...)**. Autrement dit, les contours de l'ensemble minimal font partie du motif.

Le décor apparaît alors comme la **répétition d'une seule forme.**

Il est souvent utile dans ce cas de colorer les différents exemplaires du dessin avec plusieurs couleurs, pour que le décor soit plus lisible. Le dessin apparaît alors manifestement comme un pavage, le pavé naturel étant évidemment le motif minimal figuratif.

La construction de tels motifs minimaux ayant une forme reconnaissable n'est pas facile et requiert des connaissances particulières.

La première étape est, comme indiqué sur les fiches précédentes, de choisir un type de pavage et de connaître le **polygone minimal** correspondant.

Mais cette fois, il faut jouer sur plusieurs polygones minimaux, et non plus seulement sur un seul, comme précédemment.

Lorsqu'on dessine le **motif minimal** dans le polygone minimal, il est parfois bon de sortir du polygone minimal pour poursuivre le dessin de façon esthétique. Le dessin déborde alors dans un polygone voisin. Attention, ce polygone est une copie du minimal ; ou encore le polygone minimal est une copie du polygone voisin, par une isométrie f.

Il faut donc copier dans le polygone minimal la partie du motif tracée dans le polygone voisin, par l'intermédiaire de l'isométrie f.

Il est possible de faire ceci en décalquant ou en découpant et recollant. C'est ce que les logiciels de pavages (Ornament, Kali,...) font de façon automatique. Mais il est plus instructif de le réaliser soi-même.

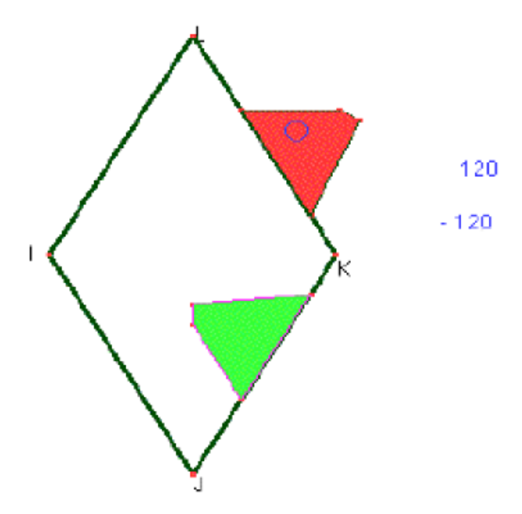
B. Exemple

On veut, par exemple, réaliser un pavage artistique de type **p3** dont le motif minimal est un poisson. La fiche 3.3 précise que dans ce cas le **polygone minimal** est un losange IJKL formé de deux triangles équilatéraux. Les sommets du losange sont les centres de tiers de tour laissant le pavage invariant.

Les figures qui suivent ont été réalisées avec le logiciel Cabri-géomètre, qui est tout-à-fait efficace pour ce genre de constructions, tout en laissant à l'utilisateur le plaisir de les décider lui-même. On se sert de façon essentielle de l'outil "polygone" de Cabri.

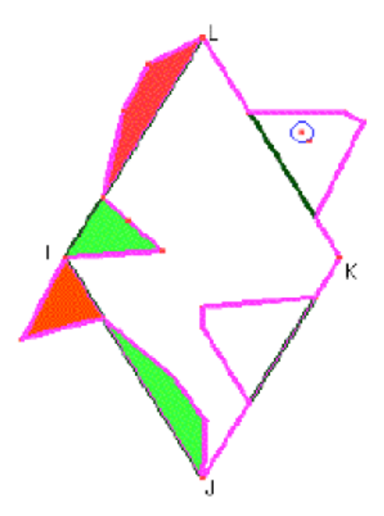
On décide de construire la tête du poissson (un polygone) sur un des côtés du losange minimal. Elle dépasse donc du losange.

Il faut donc la faire tourner autour du point K. (angle de +120°). La partie inférieure va être enlevée au losange. Elle se copie en quelque sorte en négatif.

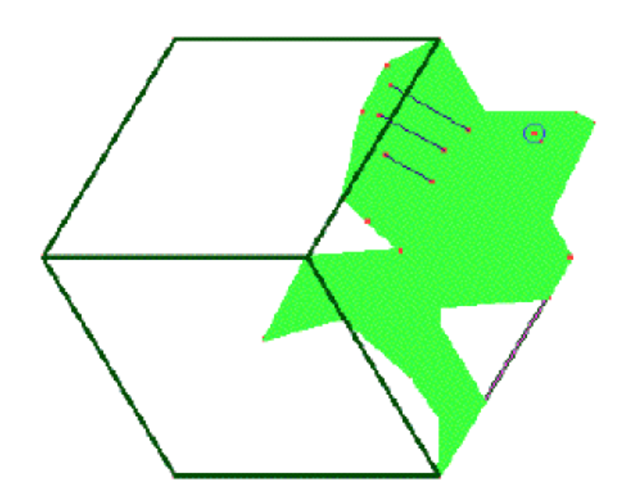


De la même façon, si on construit une arête dorsale à partir du point L (en rouge), on doit appliquer à cette forme la rotation de centre I et d'angle -120°, et la forme image (en vert) doit être découpée du losange.

Inversement, si on découpe un morceau du dos du poissson, au dessus de I, ce morceau, tourné de -120° autour de I, se rajoute au bas du losange.

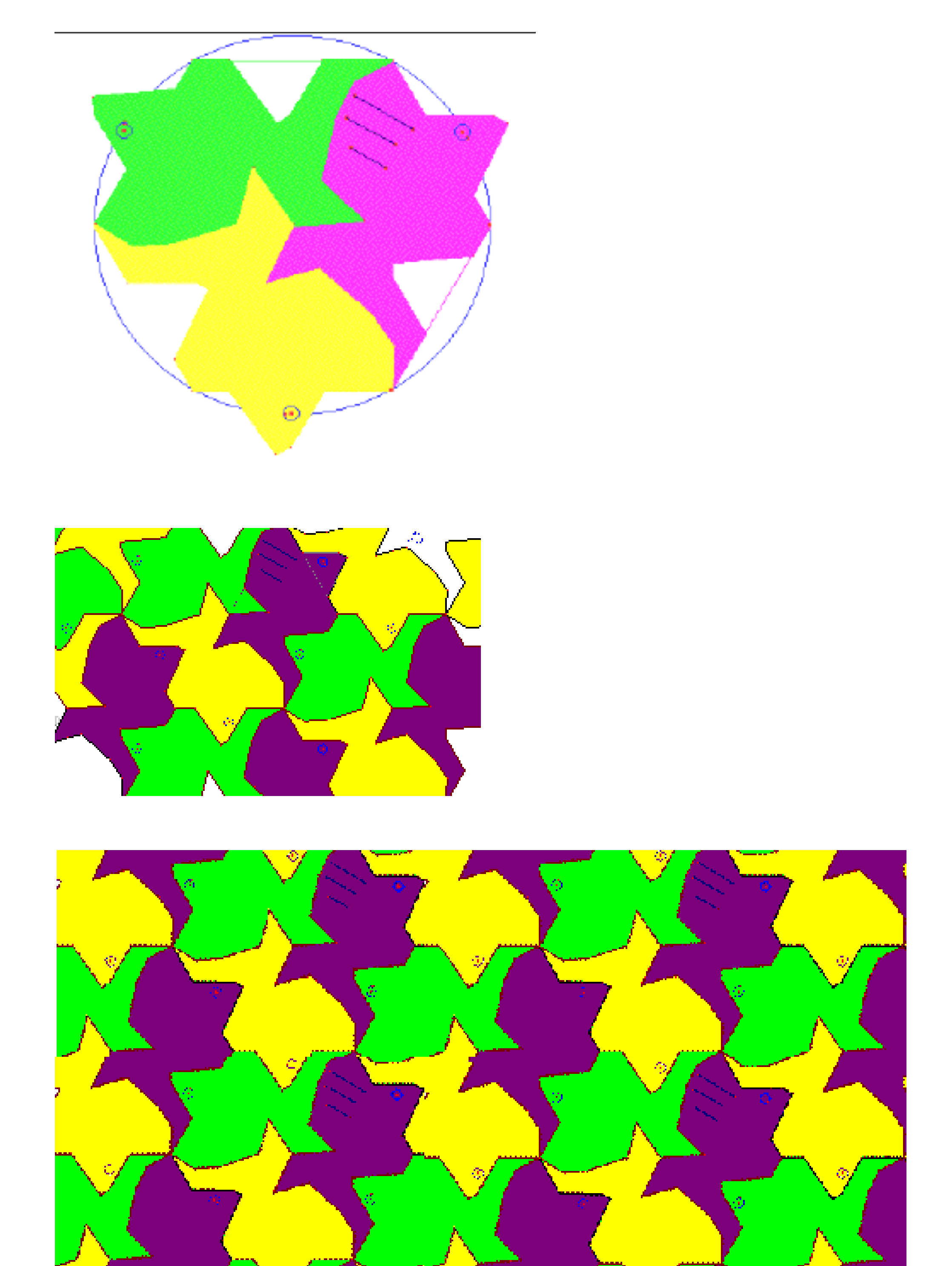


La figure suivante montre le motif minimal achevé : on peut le décorer et le colorier. On voit aussi sur cette figure le **polygone translaté** (un hexagone).



Grâce aux tiers de tours autour de I, on passe du motif minimal à l'**ensemble translaté adapté** formé de trois poissons.

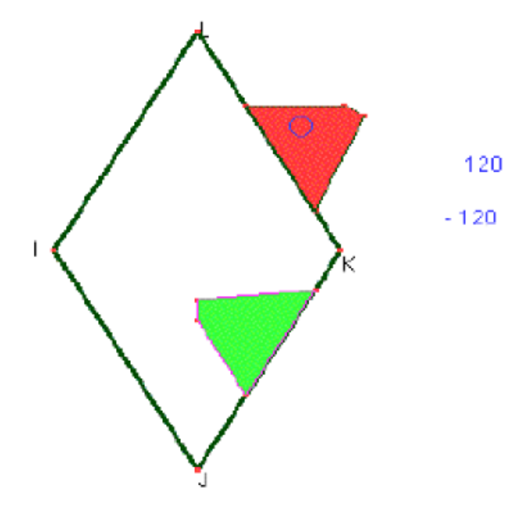
Enfin, par des translations ou par des rotations du motif minimal, on peut réaliser le pavage complet.



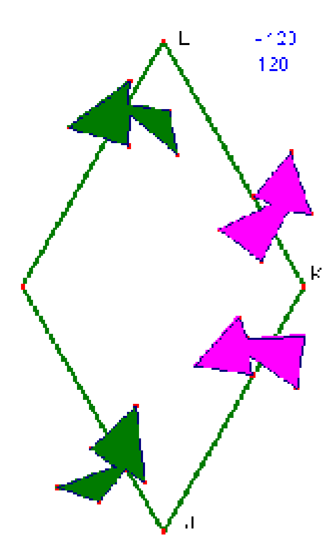
La dernière figure est réalisée en juxtaposant plusieurs des images précédentes à l'aide d'un logiciel standard de traitement d'images (par copier/coller)

C. Recollements et pliages du polygone minimal ⏏

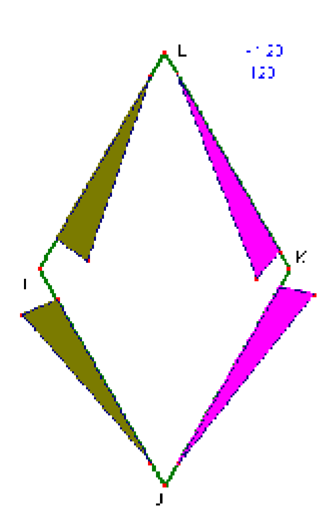
Losrque on franchit la frontière du polygone minimal, on se retrouve dans un polygone voisin. Mais ce polygone voisin va lui-même se retrouver copié, par une isométrie, dans le polygone minimal dont on est parti, comme ci-dessus.



Il se passe ce phénomène surprenant que, sorti du polygone minimal par une frontière on y rentre par une autre frontière, parfois fort éloignée. Dans l'exemple considéré, cela se traduit ainsi : la flèche du dessus en violet, se poursuit en la flèche inférieure de la même couleur ; la flèche du dessus en vert, se poursuit en la flèche inférieure de la même couleur.



Quand on considère ce pavage, on doit admettre que dans le polynôme minimal, les frontières [KL] et [KJ] sont confondues, le collage s'effectuant, sur la figure ci-dessous, dans le sens indiqué par les triangles. De même pour les frontières [IL] et [IJ].



D'un point de vue mathématique, ces identifications conduisent aux concepts fort raffinés de **topologie et géométrie quotients**, hors de propos ici. Il s'agit d'espaces qui ne sont pas simplement des parties du plan.

D'un point de vue plus concret, ces identifications permettent, de simplifier le confection du motif minimal, en collant provisoirement les frontières ainsi identifiées, grâce à un pliage du losange autour de [IK]. On réalise le motif sur le polygone plié, puis on le déplie pour réaliser le pavage : c'est la **technique de l'enveloppe** de M. Raba. Voir "le Monde des Pavages", qui propose un certain nombre de ces techniques de pliage-collage.

Si l'on désire une présentation théorique et des applications pratiques de ces espaces, on pourra aussi consulter l'adresse Internet suivante :

http://comp.uark.edu/~cgstraus/symmetry.unit/index.html (en anglais).

On consultera en particulier les sections 2 et 3, les espaces concernés ici étant nommés "**Orbitfolds**".

De toute façon, pour réaliser ce type de **pavages figuratifs**, il est nécessaire de comprendre, ne serait-ce qu'intuitivement, ces **recollements** du polygone minimal sous l'effet des **isométries du pavage**.

Haut de cette page

sommaire parcourir le dossier